SEMESTRAL

UNI

academiacesarvallejo.edu.pe

ACADEMIA
CÉSAR
VALLEJO

ACADEMIA
CÉSAR
VALLEJO

ACADEMIA
CÉSAR
VALLEJO

ACADEMIA
CÉSAR
VALLEJO

SEMESTRAL

UNI





Álgebra

Tema: Tópicos de álgebra

Docente: José Luis Vásquez Carhuamaca

SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES

Un sistema de ecuaciones de orden 2 tienen la forma:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ mx + ny = p \end{cases}$$

donde x e y son incógnitas

Resolución por eliminación de incógnitas

Resuelva el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 3x + 2y = 5 \quad \ldots (I) \\ 2x - 3y = 12 \; \ldots (II) \end{cases}$$

$A)$ { (3; −2) } $B)$ { (3; −2) } C) { (3; −2) }
D) { (3; −2) } E) { (3; −2) }

Resolución por despeje de incógnitas

Halle el valor de x si:

$$\begin{cases} 3x + 2y = -1 \quad \ldots (I) \\ -2x + y = 17 \quad \ldots (II) \end{cases}$$

$A)$ − 3 $B)$ 2 C) − 5 D) 5 E) − 1

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

PRINCIPALES PRODUCTOS NOTABLES

1.- Trinomio cuadrado perfecto

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Identidades de Legendre

$$(a+b)^2 + (a-b)^2 = 2(a^2 + b^2)$$

$$(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$$

2.- Identidades de Cauchy

$$(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab\,(a+b)$$

$$(a-b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab\,(a-b)$$

3.- Suma y diferencia de cubos

$$(a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$$

$$(a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$$

4.- Teorema

Si $a^2 + b^2 = 0, \{a, b\} \in \mathbb{R}$ entonces $a = b = 0.$

Aplicación

Determine el mayor valor de

$$f(x) = -4x^2 + 24x - 7, \qquad x \in \mathbb{R}$$

A) 13 B) 23 C) 16 D) 25 E) 29

Resolución

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

Aplicación

Si $x = \sqrt[3]{2} - 5$, calcule el valor de

$$M = x^3 + 15\sqrt[3]{2}x + 100$$

$A)$ -13 $B)$ -23 C) 18 D) 15 E) 19

Resolución

Aplicación

Si $x^3 = 8$, además $x \neq 2$. Halle el valor de

$$\mathrm{K} = x^4 + 4x^2 + 8$$

$A)$ 9 $B)$ -3 C) $1-6$ D) -5 E) -8

Resolución

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

POLINOMIOS DE UNA VARIABLE

La forma general de un polinomio de una variable es:

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$$

Variable: x

Coeficientes: $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$

Grado del polinomio: $°[P] = n$

Ejemplo:

$$P(x) = 4x^5 + 8x^3 - 7x^9 - 2$$

Coeficientes: $4;\ 8;\ -7;\ -2$ $\qquad °[P] = 9$

Polinomio lineal:

$P(x) = ax + b$

- b: Término independiente
- ax: Término lineal

Ejemplos: $M(x) = 8x + 7$

Polinomio cuadrático:

$P(x) = ax^2 + bx + c$

- c: Término independiente
- bx: Término lineal
- ax^2: Término cuadrático

Ejemplos:

$$R(x) = -\frac{2}{3}x^2 + 5x - \sqrt{7}$$

Polinomio cúbico:

$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

- d: Término independiente
- cx: Término lineal
- bx^2: Término cuadrático
- ax^3: Término cúbico

Ejemplos:

$$M(x) = 4x^3 - 7x^2 + \sqrt{5}x - \frac{1}{2}$$

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

DIVISIÓN ALGEBRAICA DE POLINOMIOS

$$\begin{array}{l|l} D(x) & d(x) \\ \hline R(x) & q(x) \end{array}$$

La división solo es posible si

$$°[D(x)] \geq °[d(x)] > 0$$

$$°[d(x)] > °[R(x)]$$

Donde:

$D(x)$: Polinomio dividendo
$d(x)$: Polinomio divisor
} Conocidos

$q(x)$: Polinomio cociente
$R(x)$: Polinomio residuo
} Por conocerse

Identidad fundamental de la división

$$D(x) = d(x)q(x) + R(x)$$

MÉTODOS PARA DIVIDIR POLINOMIOS

II) Regla de Ruffini

Halle el cociente y residuo en la siguiente división

$$\frac{11x^2 + 6x^4 + 5 - 7x^3}{3x - 2}$$

Resolución

Criterio de la división: $\dfrac{6x^4 - 7x^3 + 11x^2 + 0x + 5}{3x - 2}$

Divisor se iguala a cero

Despejar x

1 Columna

$3x - 2 = 0$	6	-7	11	0	5
$x = \frac{2}{3}$		4	-2	6	4
$\times$	6	-3	9	6	9
$\div 3$	$2x^3$	$-1x^2$	$3x$	2	

Residuo

Coef. del cociente

$$q(x) = 2x^3 - x^2 + 3x + 2 \qquad R(x) = 9$$

CÉSAR VALLEJO

III) Teorema del resto

Permite calcular el resto de una división sin efectuarla.

El resto de $\dfrac{P(x)}{ax+b}$ es $R(x)=P\left(-\dfrac{b}{a}\right)$

Ejemplos:

Si $\dfrac{P(x)}{2x+3}$ su resto es $R(x)=P\left(-\dfrac{3}{2}\right)$

Si $\dfrac{P(x)}{x-5}$ su resto es $R(x)=P(5)$

Regla práctica

I) Se iguala a cero el divisor y si este es lineal se despeja la variable, sino una expresión conveniente.

II) El valor de la variable o la expresión despejada se reemplaza en el dividendo y el resultado obtenido será el resto buscado.

Recordar: $°[d(x)] > °[R(x)]$

Aplicación

Calcule el resto de la siguiente división

$I)\ \dfrac{(x^2-5)^{2022}+x^3+1}{x+2}$ II) $\dfrac{x^{18}+x^{13}+2x+1}{x^4+1}$

Resolución

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

FACTORIZACIÓN EN $\mathbb{Q}$

Factorizar un polinomio es transformarlo en una multiplicación indicada de factores primos.

$$x^3 - x^2 - 4(x-1) = (x-1)(x+2)(x-2)$$

FACTORIZACIÓN

Factor algebraico

El polinomio no constante $f_{(x)}$ es factor o divisor del polinomio $P_{(x)}$ si la división $\frac{P_{(x)}}{f_{(x)}}$ es exacta.

Ejemplo

$(x-1)$ es factor de $P_{(x)} = 5x^3 + 7x - 12$

por que la división $\frac{5x^3 + 7x - 12}{x-1}$ es exacta

verifiquemos mediante el teorema del resto

I) $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$

II) $R_{(x)} = 5(1)^3 + 7(1) - 12 \quad \therefore \quad R_{(x)} = 0$

CRITERIOS PARA FACTORIZAR

1.- Criterio del factor común

Factorice

$$Q(x) = (3x+2)(x+3) + (3x+2)(x+4)$$

Se extrae lo común: $(3x+2)$

$$Q(x) = (3x+2)(x+3) + (3x+2)(x+4)$$

$$Q(x) = (3x+2)\left((x+3) + (x+4)\right)$$

$$Q(x) = (3x+2)(2x+7)$$

2.- Criterio del agrupamiento

Factorice $P(x) = x^3 + x^2 + 4x + 4$

Tiene 4 términos, agrupemos de 2 en 2:

$$P(x) = x^3 + x^2 + 4x + 4$$

$$= x^2(x+1) + 4(x+1)$$

$$= (x+1)\ (x^2+4)$$

3.- Criterio por identidades

Factorice $P(x;y) = x^2 - 9y^2 - 4x + 4$

Agrupamos convenientemente:

$$P(x;y) = \underbrace{x^2 - 4x + 4}_{} - 9y^2$$

$$P(x;y) = (x-2)^2 - (3y)^2$$

$$P(x;y) = (x - 2 + 3y)(x - 2 - 3y)$$

4.- Aspa simple

Factorice $P(x) = 6x^2 - 23x + 21$

Tenemos: $P(x) = 6x^2 - 23\,x + 21$

$2x \quad -3$

$3x \quad -7$

$$P(x) = (2x - 3)(3x - 7)$$

5.- Divisores binómicos

Se utiliza para factorizar polinomios de grado 3 a más.

Raíz de un polinomio

α es raíz del polinomio $P(x) \leftrightarrow P(\alpha) = 0$

Teorema del factor

α es raíz del polinomio $P_{(x)} \leftrightarrow (x - \alpha)$ es su factor, lo cuál implica $P_{(x)} = (x - \alpha).Q_{(x)}$

Donde $Q_{(x)}$ es un polinomio.

Ejemplo

Sea el polinomio $\mathrm{P}(x) = x^3 + x - 10$

- $x = 2$ es raíz, por que $P(2) = 0$
- Por teorema del factor tenemos

$$\mathrm{P}(x) = (x-2)Q(x) \rightarrow Q(x) = ax^2 + bx + c$$

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

Aplicación

Factorice e indique un factor de

$$P(x) = x^3 - 5x^2 - 8x + 12$$

$A)\ x+1$ $B)\ x-2$ C) $2x+1$ D) $x+3$ E) $x-6$

Resolución

Aplicación

Factorice e indique un factor de

$$P(x) = 12x^3 - 8x^2 - x + 1$$

$A)\ x+1$ $B)\ x-2$ C) $2x+1$ D) $x+3$ E) $x-6$

Resolución

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

INECUACIÓN POLINOMIAL

Su forma general es:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n \gtrless 0$$

Donde: $a_0 \neq 0 \quad \wedge \quad n \geq 1$

Ejemplos:

- $x^3 + 2x^2 - 4x - 8 \leq 0$
- $4x^4 - 5x^2 + 1 > 0$

Resolución:

1) La inecuación que tome su forma general y es convenientes que su coeficiente principal sea positivo.

2) Factorice en $\mathbb{R}$

3) Aplique el criterio de los puntos críticos e indique el conjunto solución.

Ejemplo:

Resolver:

$$x^3 - 3x^2 \leq 4x - 12$$

Resolución

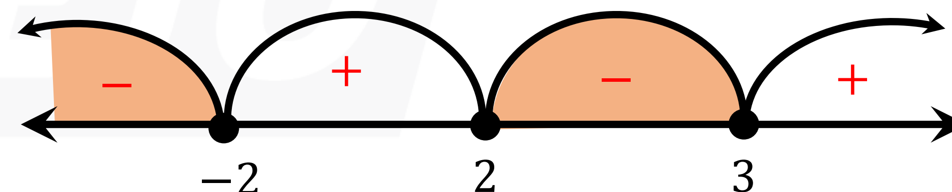
1) $x^3 - 3x^2 - 4x + 12 \leq 0$

2) $x^2(x-3) - 4(x-3) \leq 0$

$(x-3)(x^2-4) \leq 0$

$(x-3)(x+2)(x-2) \leq 0$

3) Punto críticos: $3, -2, 2$



$\therefore \quad CS = \langle -\infty; -2] \cup [2; 3]$

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

ACADEMIA

CÉSAR VALLEJO

GRACIAS

SÍGUENOS:

academiacesarvallejo.edu.pe